$\boxed{\text{Aula 1}}$ Séries de Potências

$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ — c ↳ centro; a_n ↳ coeficientes

Ex. 1)

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{7^n}(x-3)^n$ $\quad a_n = \frac{n!}{7^n}\ ;\ c=3$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ $\quad a_n = n\ ;\ c=0$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(2x+1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^n$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \times 2^n \left(x+\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n$

$a_n = \frac{(-2)^n}{n+1}\ ;\ c = -\frac{1}{2}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{x+3}(x-2)^n$ Não é uma série de potência pois a_n depende de x!

Ex. 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \rightarrow$ Série geométrica de razão $r = x$ e 1º termo $u_0 = x^0 = 1$

Converge se $|r|<1$, ou seja $|x|<1$ ↳ $-1<x<1$

A sua soma é $S = \frac{u_0}{1-r} = \frac{1}{1-x}$

Domínio de convergência é $]-1,1[$

Nas séries de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$:

Critério de D'Alembert:

$\hookrightarrow L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right|$

$a_n \neq 0,\ x \neq c$

Critério da Raiz

$\hookrightarrow L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|}$

Ex 3) a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ $\quad a_n \neq 0,\ \forall n \geq 0$

Se $x=0$ (centro), a série converge absolutamente pois é a série nula

se $x\neq 0$, aplicar o critério de D'Alembert

$L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{1}{n!}x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}\times n!}{(n+1)!\,x^n}\right|$

$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n\times x^1\times n!}{(n+1)n!\,x^n}\right| = |x| \times \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = |x|\times 0 = 0$ $\quad \boxed{L=0}$

Como $L=0$, a série conv. abs. $\forall x \in \mathbb{R}$. Então D.C. $=\mathbb{R}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2n}(x-2)^n \rightsquigarrow$ Aplicar Critério da Raiz

$L = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-2)^n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|n^{2n}(x-2)^n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|(n^2)^n\times(x-2)^n|}$

$= \lim_{n\to+\infty} n^2 \times |x-2| = \begin{cases} 0 & \text{se } x=2 \\ +\infty & \text{se } x\neq 2\end{cases}$ (não é indet. porque $|x-2|$ é mesmo 0, não tende para)

A série conv. abs. se $x=2$. Logo D.C. $=\{2\}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (2x+6)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$ Se $x=-3$, a série conv. abs.

$\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} \to a_n \neq 0, \forall n \geq 1$

$\hookrightarrow (2(x+3))^n = 2^n (x+3)^n$

se $x \neq -3$ usar crit. de D'Alembert.

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} (x+3)^{n+1}}{\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-2)^n \times (-2)^1 \times (x+3)^n \times (x+3)^1 \times \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} \times (-2)^n \times (x+3)^n} \right|$$

$$= 2|x+3| \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{maior} \\ \text{grau}}}{=} 2|x+3| \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{n}}}_{=1} = 2|x+3|$$

Pelo critério de D'Alembert a série conv. abs. se:

$L < 1 \Leftrightarrow 2|x+3| < 1 \Leftrightarrow |x+3| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x+3 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2} - 3 < x < \frac{1}{2} - 3 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < -\frac{5}{2}$ e diverge se $L > 1$, ou seja, $x \in]-\infty, -\frac{7}{2}[\cup]-\frac{5}{2}, +\infty[$

Falta verificar a natureza da série quando $x = -\frac{7}{2}$ e quando $x = -\frac{5}{2}$

$\boxed{x = -\frac{7}{2}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (2x+6)^n \xrightarrow{x = -\frac{7}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(2 \times \left(-\frac{7}{2}\right) + 6\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times (-1)^n$$

$(-1)^{2n} = 1$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \rightsquigarrow \text{Série de Riemann com } \alpha = \frac{1}{2} \leq 1, \text{ logo diverge}$$

$\boxed{x = -\frac{5}{2}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{\sqrt{n}} (2x+6)^n \xrightarrow{x = -\frac{5}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(2 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 6\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to \text{série alternada}$$

Série dos módulos: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \to$ diverge

Usar critério de Leibniz para estudar a natureza de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{\sqrt{n}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

- $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ✓
- $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\overbrace{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}^{\leq 0, \forall n \in \mathbb{N}}}{\sqrt{n+1} \times \sqrt{n}} \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, logo a sucessão (v_n) é decrescente

Pelo critério de Leibniz a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge e a convergência é simples (pois a série dos módulos diverge)

Resposta: $D.C. =]-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}]$ conv. abs em $]-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}[$
Conv. simp. em $-\frac{5}{2}$

d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{9^n(n^2-1)} x^{2n}$ → Pode-se resolver mesmo assim

↳ $a_n \neq 0, \forall n \geq 2$

Se $x=0$ a série conv. abs. Se $x \neq 0$, usar crit. de D'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{9^{n+1}((n+1)^2-1)} x^{2(n+1)}}{\frac{1}{9^n(n^2-1)} \times x^{2n}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x^{2n+2} \times 9^n \times (n^2-1)}{9^{n+1} \times (n^2+2n+1-1) \times x^{2n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x^2(n^2-1)}{9(n^2+2n)} \right| = \frac{1}{9} x^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{n^2+2n} = \frac{1}{9} x^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{9} x^2$$

! maior grau

A série converge se $L < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9}x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow -\sqrt{9} < x < \sqrt{9} \Leftrightarrow -3 < x < 3$

Diverge se $x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$

E em $x=-3$ e em $x=3$?

$\boxed{x=-3}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{9^n(n^2-1)} x^{2n} \xrightarrow{x=-3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{9^n(n^2-1)} \times (-3)^{2n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

→ usar critério de comparação (limite)

$a_n > 0$

Seja $b_n = \frac{1}{n^2} > 0, \forall n \geq 2$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

Pelo crit. da comp. as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ têm a mesma natureza

↳ Série de Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$, logo converge

Portanto a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ converge

Como esta série coincide com a série dos módulos então a conv. é absoluta

$\boxed{x=3}$ → Dá a mesma série que anterior e então conv. abs.

Resposta: D.C. $= [-3, 3]$ (conv. abs.)